УДК 519.8

О.Є. Кірік

РОЗПОДІЛ ПОТОКІВ У МЕРЕЖАХ СКЛАДНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ТОПОЛОГІЇ

Вступ

Оптимальне функціонування систем, що здійснюють централізоване забезпечення розосереджених споживачів електричною, тепловою енергією, паливом, водою або іншою речовиною, що транспортується, відіграє велику роль в енергетиці, водному господарстві та інших галузях. Тому розподіл потоків у мережах – це надзвичайно важлива прикладна проблема, яка давно досліджується і якій присвячено велику кількість публікацій. Математичний опис потокорозподілення у вигляді нелінійних оптимізаційних задач вимагає розвитку теорії та застосування ефективних методів нелінійного програмування [1–5].

Розподіл потоків у розподільних мережах – це задачі великої розмірності із специфічною структурою матриць обмежень. Тому зменшення розмірності задачі розподілу потоків – один із важливих засобів підвищення ефективності розрахунку мережі. У даній статті нелінійна задача розподілу потоків, невідомими якої є потоки вздовж ділянок мережі, зводиться до задачі без обмежень, розмірність якої залежить від кількості замкнених циклів мережі. Для розв’язання цієї задачі невеликої розмірності застосовується, зокрема, метод покоординатного спуску, доцільність використання якого зумовлена адитивною сепарабельністю мережевих функцій.

Методи розрахунку потоків, які розглядаються нижче, можуть бути застосовані для розрахунку нафтопроводів, газопроводів, водопроводів та інших розподільних систем складної конфігурації, що містять замкнені контури. Додаткове підвищення ефективності розрахунків досягається, якщо подача продукту з деяких джерел вважається нефіксованою.

Постановка задачі

Сформулюємо загальну оптимізаційну задачу розподілу потоків. У заданій за конфігурацією мережі відомими є довжина і пропускна здатність ділянок та розташування витоків (джерел). Треба розрахувати оптимальний розподіл потоків, зокрема оптимальне навантаження джерел.

Розв’язання цієї задачі розбиваємо на дві частини. Спочатку розраховуємо потоки для задачі без технологічних обмежень. Отриманий розподіл потоків використовуємо для формування початкового наближення для розв’язання задачі в загальній постановці, тобто з технологічними обмеженнями на пропускну здатність ділянок та з оптимальним перерозподілом навантаження джерел.

Деякі означення і обґрунтування

Топологічно мережа зображується у вигляді плоского орієнтовного графа $G=(N,V)$, що є парою скінченних множин N і V [6]. Елементи i множини N називаються вершинами графа G, а елементи v множини V – дугами. При цьому кожній дузі $v \in V$ ставиться у відповідність упорядкована пара вершин (i,j), $i,j \in N$, що є її початком і кінцем. Неорієнтовані дуги графа називатимемо ребрами.

Послідовність $(j_1, j_2, ..., j_m)$, $j_k \in N$, називається шляхом, що з’єднує вершини j_1 і j_m, якщо $(j_k, j_{k+1}) \in V$, $k=1,...,m-1$, $j_i \neq j_l$, $i \neq l$.

Граф G називається зв’язним, якщо для довільних вершин $a,b \in N$ існує такий шлях, що $j_1 = a$ і $j_m = b$. Дуга $v=(a,b)$ – розділяюча, якщо після її видалення з множини V граф $G' = (X, V \setminus v)$ стає незв’язним.

Зв’язний граф називається деревом, якщо довільна його дуга є розділяючою. Ясно, що коли граф G – дерево, то існує єдиний шлях, який з’єднує довільні дві його вершини.

Довільний підграф $G' = (N', V')$, $N' \subseteq N$, $V' \subseteq V$, зв’язного графа G називається максимальним деревом, якщо $N' = N$ і граф $G' = (N, V')$ є деревом.

Розглянемо зв’язний граф G. Виділимо в ньому довільно вершину i. Будуємо процес позначень таким чином. На першому етапі позначаємо вершину $i = i_0$. Далі, якщо $(i,j) \in V$, то вершина j вважається позначеною і позначеними будуть дуги (i_0, j) незалежно від їх спрямованості. Надалі, якщо довільна вершина i позначена, то і вершина j позначається при

$(i,j)\in V$, причому відповідна дуга позначається також.

Отже, на кожному кроці процесу позначень, починаючи з вершини $i=i_0$, позначається одна вершина і одна дуга. Оскільки граф G є зв'язним, то процес закінчиться позначенням всіх вершин. Якщо $|N|$ – кількість елементів скінченної множини N, то, не враховуючи позначки початкової вершини i_0, буде позначено $|N|-1$ вершин і стільки ж дуг. Нехай V' – множина позначених дуг і розглянемо граф $G'=(N,V')$. Цей граф – дерево. Дійсно, якби існувало два різних шляхи у графі G' від деякої вершини i до іншої вершини j, то це означало б, що вершина j позначена двічі, чого не може бути за побудовою процедури позначень.

Довільне максимальне дерево отримується, якщо провести процес позначень відповідним чином.

Нехай побудовано деяке максимальне дерево вихідного графа G. Розглянемо непозначені дуги цього графа. Їх кількість дорівнює $|V|-(|N|-1)$. Виділимо (a,b) – одну з непозначених дуг. Тоді з початкової вершини i_0 виходить єдиний шлях $J_1=(j_1,j_2,...,j_m)$, $j_1=i_0$, $j_m=a$. Так само до вершини b веде єдиний шлях $J_2=(k_1,k_2,...,k_n)$, $k_1=i_0$, $k_n=b$, вздовж побудованого максимального дерева. Початкові вершини цих шляхів збігаються. Нехай l – перший індекс, для якого $j_i=k_i$, $j_{i+1}\neq k_{i+1}$, $1\le i\le l$. Тоді шляхи $(j_1,j_2,...,j_m)$ і $(k_1,k_2,..., k_n)$ не можуть мати спільних вершин, крім $j_l=k_l$, оскільки вони належать побудованому дереву, а дерево не має циклів.

Побудуємо тепер цикл $(j_l,j_{l+1},...,j_m,k_n, k_{n-1},...,k_l)$. Таким чином, якщо $(a,b)\notin V'$, то їй відповідає деякий цикл. Кількість таких циклів дорівнює $|V|-(|N|-1)$ і не залежить від способу позначень.

Нехай x_{ij} – величина потоку від вершини i до вершини j вздовж дуги $(i,j)\in V$. Основна система, що є обмеженнями для змінних в оптимізаційних задачах розподілу потоків, є система рівнянь, заданих у вершинах графа:

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji}=d_i,\ i\in N. \qquad (1)$$

Величина d_i означає кількість речовини, що споживається $(d_i<0)$ чи подається в мережу $(d_i\ge 0)$ у вершині i.

Для розв'язуваності системи (1) необхідно, щоб виконувалось співвідношення

$$\sum_{i\in N} d_i=0, \qquad (2)$$

що є умовою матеріального балансу: сумарне споживання повинно дорівнювати сумарній кількості речовини, яка подається в мережу.

Як сказано вище, ми вважаємо, що досліджувана нами мережа зображається у вигляді зв'язного графа. Якщо дуга $(a,b)\in V$ є розділяючою, то після її видалення з множини V граф $G'=(N,V\backslash(a,b))$ стає незв'язним. Нехай видалення дуги (a,b) з графа призводить до розділення графа на дві частини: $G_a=(N_a,V_a)$ і $G_b=(N_b,V_b)$, що містять відповідно вершини a і b.

Теорема 1. Якщо у зв'язному графі G дуга (a,b) – розділяюча, то система (1) однозначно визначає потік по цій дузі і

$$x_{ab}=\sum_{i\in N_a} d_i=-\sum_{i\in N_b} d_i\ . \qquad (3)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки дуга (a,b) – розділяюча, то її видалення з графа призводить до його розділення на дві частини – $G_a=(N_a, V_a)$ і $G_b=(N_b,V_b)$, що містять відповідно вершини a і b.

Перетворимо при цьому систему (1) таким чином. Перенесемо доданок x_{ab} в праву частину. Оскільки він входить у два рівняння цієї системи з різними знаками, то отримаємо

$$d'_a=d_a-x_{ab},$$

$$d'_b=d_b+x_{ab}.$$

Покладемо $d'_i=d_i$ для всіх $i\neq a,b$.

Система (1) розділилася на дві незалежні підсистеми:

$$\sum_{j:(i,j)\in V_a} x_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in V_a} x_{ji}=d'_i,\ i\in N_a,$$

$$\sum_{j:(i,j)\in V_b} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V_b} x_{ji} = d_i',\ i \in N_b .$$

Згідно з умовами розв'язності цих систем (див. формулу (2)) матимемо

$$\sum_{i\in N_a} d_i' = \sum_{i\in N_a} d_i - x_{ab} = 0 ,$$

$$\sum_{i\in N_b} d_i' = \sum_{i\in N_b} d_i + x_{ab} = 0 ,$$

що й треба було довести.

Теорема 2. Якщо граф G є деревом, то при виконанні умови (2) система (1) має єдиний розв'язок.

За попередньою теоремою розв'язок системи (1) дається формулою (3), оскільки для дерева довільна дуга є розділяючою. Таким чином, якщо розв'язок існує, то він єдиний. Існування ж його доводиться індукцією за кількістю вершин дерева.

Отже, для графа типу дерева розподіл потоків визначається однозначно.

Нехай шлях $J = (j_1, j_2, ..., j_m)$ з'єднує вершини $j_1 = a$ і $j_m = b$.

Покладемо

$$\omega_{ij,J} = \begin{cases} +1, \text{ якщо } \exists k : i = j_k, j = j_{k+1}, (j_k, j_{k+1}) \in V, \\ k = 1,...,m-1, \\ -1, \text{ якщо } \exists k : i = j_k, j = j_{k+1}, (j_{k+1}, j_k) \in V, \\ k = 1,...,m-1, \\ 0 \text{ у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для кожного шляху J функцію ω_J можна розглядати як вектор, розмірність якого збігається з кількістю дуг графа G, тобто $|V|$. Між векторами ω_J і шляхами у графі G існує взаємно однозначна відповідність.

Теорема 3. Якщо J – шлях з вершини $a \in N$ до вершини $b \in N$, то

$$\sum_{j:(i,j)\in V} \omega_{ij,J} - \sum_{j:(j,i)\in V} \omega_{ji,J} = \begin{cases} +1 \text{ для } i = a, \\ -1 \text{ для } i = b, \\ 0 \text{ для } i \neq a, b, \end{cases} \quad (4)$$

$$i \in N.$$

Д о в е д е н н я. Достатньо розглянути простий шлях $J = (a, b)$, який складається лише з однієї неорієнтованої дуги. Тут можливі два випадки: $(a,b) \in V$ або $(b,a) \in V$.

Якщо $i \neq a, b$, то всі доданки в лівій частині (4) дорівнюють нулю і (4) виконується. Якщо $i = a$, то в лівій частині (4) тільки один доданок $\omega_{ab,J} = 1$ не дорівнює нулю, і тому ліва частина дорівнює 1. Якщо ж $(b,a) \in V$, то $\omega_{ba,J} = -1$, решта доданків дорівнює нулю, і (4) знову виконується.

Аналогічно відбувається для випадку $i = b$.

Для загального шляху $J = (j_1, j_2, ..., j_m)$, $j_1 \neq j_m$, результат отримаємо, якщо врахуємо, що, крім початкової j_1 і кінцевої j_m вершин, решта вершин j_k входять до двох елементарних шляхів (j_{k-1}, j_k) і (j_k, j_{k+1}) – один раз як кінцева, другий – як початкова. Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо J – цикл, то

$$\sum_{j:(i,j)\in V} \omega_{ij,J} - \sum_{j:(j,i)\in V} \omega_{ji,J} = 0 \text{ для всіх } i \in N. \quad (5)$$

Доведення випливає з попереднього із врахуванням того, що тепер абсолютно всі вершини є початковими для одного елементарного шляху та кінцевими – для іншого.

Нехай тепер G – довільний зв'язний граф. Виділимо в ньому способом позначень деяке дерево $G' = (N, V')$ і для кожної вершини з N виберемо однозначно шлях J_k, $k \in N$, що веде до вершини k з початкової вершини i_0. Однозначність вибору визначається тим, що граф G' є дерево. Якщо взяти тепер дуги $v \in V \backslash V'$, то згідно із сказаним вище, їм відповідатимуть цикли Z_s, $s = 1, 2, ..., |V| - (|N| - 1)$, що містять як складові дуги дерева, крім однієї непозначеної дуги, що і визначає цей цикл.

Покладемо $g = |V| - (|N| - 1)$.

Теорема 5. Повний розв'язок системи (1) задається формулою

$$x_{ij} = x_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_{ij, Z_k} , \quad (6)$$

де x_{ij}^0 – розв'язок системи (1) для максимального дерева G':

$$x_{ij}^0 = \sum_{\substack{k\in N \\ k\neq i_0}} \omega_{ij, J_k} d_k . \quad (7)$$

Доведення. Нехай виконані необхідні умови розв'язності системи (1), тобто $\sum_{i\in N} d_i = 0$. Якщо $G' = (N, V')$ — виділене дерево, то систему (1) можна перетворити до вигляду

$$\sum_{j:(i,j)\in V'} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V'} x_{ji} = d_i', \; i \in N, \qquad (8)$$

де

$$d_i' = d_i - \sum_{j:(i,j)\in V\setminus V'} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V\setminus V'} x_{ji} \;,$$

тобто в рівняннях (1) невідомі, які відповідають дугам, що не входять у максимальне дерево, переносяться в праву частину. Це — непозначені дуги графа. Задамо на них потоки c_k довільним чином. Тоді система (1) для графа G перетвориться в систему (1) для дерева G' з правими частинами d_i'.

Як було зазначено вище, для дерева G' система має єдиний розв'язок, причому при довільному виборі потоків x_{ij} на непозначених дугах решта потоків по позначених дугах визначається однозначно.

Формула (6) показує, що загальний розв'язок системи (1) складається з частинного розв'язку x^0 і довільно заданих потоків на дугах, які не входять у дерево. При цьому враховується, що згідно з теоремою 4 ω_{Z_k} є розв'язком однорідної системи (1). Більше того, якщо ω_{Z_k} — вектори у просторі $R^{|V|}$ з компонентами ω_{ij,Z_k}, $(i,j)\in V$, то вони є лінійно незалежними. Дійсно, для довільної непозначеної дуги $(i,j)\in V$ рівність

$$\sum_{k=1}^{g} \omega_{ij,Z_k} \alpha_{ij} = (\pm 1)\alpha_{ij} = 0$$

можлива лише тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$, оскільки цикл Z_k вміщує в себе тільки дуги дерева, крім однієї.

Доведемо справедливість формули (7). Для цього необхідно показати, що величини x_{ij}^0 задовольняють рівняння (1). Скориставшись формулами (4) для $i \neq i_0$, отримаємо

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij}^0 - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji}^0 =$$

$$= \sum_{\substack{k\in N \\ k\neq i_0}} \left(\sum_{j:(i,j)\in V} \omega_{ij,J} - \sum_{j:(j,i)\in V} \omega_{ji,J} \right) d_k = d_i.$$

Теорема 6 [7]. Якщо G — плоский граф, то у формулі (6) за цикли можна взяти такі, що обмежують скінченні області, на які граф розбиває площину.

Доведення. За теоремою Ейлера [6], кількість обмежених областей, на які плоский граф розбиває площину, становить $g = |V| - |N| + 1$. З теорем лінійної алгебри для доведення теореми 6 необхідно встановити, що вектори ω_{Z_s}, які відповідають циклам Z_s і які обмежують ці області, є лінійно незалежними.

Доведення можна провести індукцією по g. Насправді, у плоскому графі завжди є дуги, що відділяють зовнішню необмежену область від деякої обмеженої області. Вектор ω_{Z_t}, який відповідає такому циклу, матиме компоненту для цієї дуги, що дорівнює одиниці. Оскільки дана дуга не входить у жоден із вказаних циклів, то вектор ω_{Z_t} є лінійно незалежним від інших векторів ω_{Z_k}, $k \neq t$. Звідси випливає лінійна незалежність векторів ω_{Z_k}. Оскільки їх кількість, згідно із сказаним вище, дорівнює g, то у формулі (7) за цикли Z_k дійсно можна взяти цикли, що обмежують скінченні області, на які граф розбиває площину.

Основні системи рівнянь для розподільних мереж

Систему (1) можна назвати першою основною системою рівнянь на графі, що відображає закон збереження речовини і гарантує задоволення споживачів.

Друга основна система рівнянь виникає із закону, який вимагає, щоб падіння тиску вздовж довільного замкненого контуру дорівнювало нулю, тобто

$$\sum_{(i,j)\in V} \omega_{ij,Z_s} h_{ij} = 0 \;, \; s = 1,2,\ldots,n, \qquad (9)$$

де Z_s — перенумеровані замкнені контури (цикли) мережі, а величина ω_{ij,Z_s}, як сказано вище, характеризує приналежність дуги (i,j) контуру Z_s. Якщо всі дуги, які утворюють контур

Z_s, зорієнтовані певним чином, наприклад як додатний вибрано напрямок за годинниковою стрілкою, то

$$\omega_{ij,Z_s} = \begin{cases} +1, \text{ якщо } (i,j) \in Z_s \text{ та орієнтовано} \\ \text{за контуром,} \\ -1, \text{ якщо } (i,j) \in Z_s \text{ та орієнтовано} \\ \text{проти контуру,} \\ 0, \text{ якщо } (i,j) \notin Z_s. \end{cases}$$

При цьому падіння тиску h_{ij} вздовж дуги (i,j) є функція від потоку x_{ij}, тобто

$$h_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) . \tag{10}$$

Ця функція змінює свій вигляд залежно від параметрів дуги, зокрема від її довжини l_{ij}.

Дані залежності лежать в основі розрахунку мереж. За умови виконання (2) спільний розв'язок рівнянь (1), (9) і (10) існує, є єдиним і дає розподіл потоків, що реалізує мінімум функції

$$F = \sum_{(i,j)\in V} \int_0^{x_{ij}} f_{ij}(t)dt \tag{11}$$

на множині, яка задається системою (1) [7].

Залежно від параметрів мережі змінюється формула для падіння тиску і, відповідно, різного вигляду набуває функція (11). Наприклад, розрахунок мережі з формулою для падіння тиску

$$h_{ij} = (1+\alpha) l_{ij} |x_{ij}|^{\alpha} \operatorname{sign} x_{ij}, \ 0 < \alpha < 1 , \tag{12}$$

відповідає мінімізації функції

$$\overline{F} = \sum_{(i,j)\in V} l_{ij} |x_{ij}|^{1+\alpha} \tag{13}$$

за обмежень (1). Функція $\operatorname{sign} x$ визначається з умови

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0. \end{cases}$$

Таким чином, у даному випадку розрахунок мережі зводиться до розв'язання задачі (13) за обмежень (1). Ця задача при $\alpha = 0$ переходить у лінійну транспортну задачу, коли замовлення доставляється споживачу найкоротшим шляхом. Особливість лінійних транспортних задач є такою, що по деяких ділянках транспортування може не відбуватися. Очевидно, лінійна модель неприйнятна для енергетичних систем, зокрема для трубопроводів, всі ділянки яких мають бути завантажені.

При практичній реалізації алгоритмів спостерігається, що чим меншим вибирається α, тим ближчий розподіл потоків до доставки найкоротшим шляхом.

Знаходження частинного розв'язку системи рівнянь розподілу потоків (1)

Алгоритм* 1. *Варіант кодування мережі

1. Позначаємо $i_0 = 0$ довільну вершину ненумерованого неорієнтованого графа. Вершини, з'єднані з i_0, нумеруємо в довільному порядку цифрами $1, 2, ..., j_0$. Дуги (i_0, j), $j = 1, 2, ..., j_0$, вводимо в деяку множину R. Будемо вважати, що всі дуги з R орієнтовані від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером.

2. Після нумерації вершин, з'єднаних дугами з початковою, приступаємо до нумерації вершин, з'єднаних з наступною за номером вершиною числами $j_0 + 1$, $j_0 + 2, ..., j_1$. Відповідні дуги також відносимо до множини R.

3. Загалом, якщо вершини, з'єднані з вершиною i, вже нумеровані числами $j_{i-1} + 1$, $j_{i-1} + 2, ..., j_i$, то ще не нумеровані вершини, з'єднані з вершиною $i+1$, нумеруються числами $j_i + 1, j_i + 2, ..., j_{i+1}$ і ребра $(i+1, j_i + 1), ...,$ $(i+1, j_{i+1})$ належать до множини R.

Процес закінчується, коли вже перенумеровані всі вершини.

Нумерація, побудована за цим алгоритмом, має певні властивості.

Номер даної вершини j стоїть на другому місці лише для одного з ребер, що ввійшли до множини R, тобто в R є лише одне ребро, в якого вершина j є кінцем.

Дійсно, якщо вершина j отримала номер при нумерації вершин, з'єднаних з вершиною i, то тоді ребро (i,j) за побудовою нумерації орієнтовано від i до j, бо $j > i$. З іншого боку, якщо j занумеровано, то в подальшому ненумеровані вершини отримають номери більші

j, тобто для решти ребер j може бути тільки початком. Якщо i_j позначити початкову вершину дуги, в нумерації якої j стоїть на другому місці, то послідовність дуг можна записати у вигляді (i_j, j), $j = 1, 2, ..., \bar{m}$. Таке кодування компактно відображає конфігурацію мережі і автоматично призводить до виділення на графі максимального дерева.

Ребра, що не ввійшли до множини R, можна зорієнтувати довільно.

Крім нумерації вершин, перенумеруємо області, на які граф розбиває площину в довільному порядку числами $1, 2, ..., g$. Цифрою 0 позначаємо зовнішню необмежену область. У плоскому графі кожна дуга розмежовує точно дві області. Приписуємо кожній дузі пару індексів $[q, p]$, де q і p — номери областей, які дуга розділяє, при цьому на першому місці стоїть номер тієї області, в контурі Z_q якої дана дуга є орієнтованою за годинниковою стрілкою.

Таким чином, кожна дуга графа характеризується двома парами чисел: номерами вершин, які вона з'єднує, і номерами областей, які вона розділяє.

Алгоритм 2. Знаходження частинного розв'язку системи (1)

1. Покладаємо $x_{ij} = 0$, $(i, j) \neq R$.

2. Починаємо основний цикл з $j = n$, $x_{i_n n} = d_n$.

3. Нехай $x_{i_j j}$, $j = n, n-1, ..., l+1$, вже знайдені. Тоді $x_{i_l l}$ обчислюємо за формулою

$$x_{i_j j} = d_j + \sum_{k \in N_j^R} x_{jk} \quad \text{при} \quad j = l.$$

Тут N_j^R — множина вершин з R, що поєднані дугами з вершиною j і мають більший номер.

4. Повторюючи крок 3 для $j = n, n-1, ..., 1$, отримуємо значення потоків по всіх дугах максимального дерева.

Розв'язання задачі задоволення споживачів з найменшими витратами на доставку

Як показано вище, загальний розв'язок системи (1) можна записати у вигляді (6), де x_{ij}^0 — частинний розв'язок цієї системи, а c_k — довільні параметри, кількість яких визначається кількістю замкнених контурів мережі. Якщо частинний розв'язок x_{ij}^0 відомий, то ці параметри знаходяться способом мінімізації опуклої функції (13) після підстановки в неї виразу (6). Якщо вважати, що доданки функції (13) відображають умовну вартість проходження потоку вздовж дуг, то задача (13) за обмежень (1) розв'язує проблему задоволення споживачів із найменшими витратами на доставку продукту.

Зазначимо, що оскільки в мережі кількість замкнених контурів набагато менша кількості ділянок, то такий підхід до розрахунку потоків значно зменшує розмірність задачі і обсяги обчислень.

Для мінімізації $\bar{F}$ можна застосовувати довільний метод опуклого програмування. Будемо використовувати метод покоординатного спуску, збіжність якого для задач такого типу досліджувалася в [7]. Його застосування означає, що здійснюється поступовий перегляд замкнених контурів мережі і на кожному кроці варіюється одна змінна c_k, $k = 1, 2, ..., g$.

Алгоритм 3. Розрахунок параметричних змінних

1. Покладаємо $c_k^0 = 0$, $k = 1, 2, ..., g$.

2. Нехай зроблено s кроків процесу і c_k^s, $k = 1, 2, ..., g$, вже знайдено. Знаходимо c_k^{s+1}, $k = 1, 2, ..., g$, мінімізуючи функцію

$$F\left(x_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_{ij, Z_k}\right) \tag{14}$$

по кожному з параметрів c_k при фіксованих решті параметрів $c_k = c_k^e$, $e = 1, 2, ..., s-1, s+1, ..., g$. Для варіювання s-ї координати використовуватимемо метод Ньютона:

$$c_k^{s[t+1]} = c_k^{s[t]} - \frac{\partial F}{\partial c_k^{s[t]}} \bigg/ \frac{\partial F^2}{\partial (c_k^{s[t]})^2}, \; t = 0, 1, ...$$

Мінімум (14) досягається при $c_k^{s[t]}$, для якого $\frac{\partial F}{\partial c_k^{s[t]}} = 0$. Покладаємо $c_k^{s+1} = c_k^{s[t]}$.

3. Повторюємо крок 2 до тих пір, поки c_k^{s+1} не збіжиться з c_k^s для $k = 1, 2, ..., g$ з певною точністю ε.

Таким чином, для розв’язання задачі (13) за обмежень (1) розрахунку мережі насамперед будуємо максимальне дерево цієї мережі, наприклад, за алгоритмом 1. Використовуючи алгоритм 2, знаходимо однозначний розподіл потоків вздовж ребер максимального дерева. Потім, розглядаючи задачу (13) з обмеженнями (1) як параметричну і застосовуючи алгоритм 3, розв’язуємо задачу “ув’язки” замкнених циклів мережі, в результаті отримуємо розподіл потоків вздовж всіх дуг графа G.

Задача розподілу потоків з оптимальним перерозподілом навантаження джерел

Нехай $\bar{N} \subseteq N$ – підмножина вершин графа, де розташовані джерела. Потік x_{ij}, що протікає по дузі графа (i, j), обмежений знизу і зверху величинами r_{ij}^- і r_{ij}^+. Запишемо сформульовану вище задачу знаходження розподілу потоків мінімальної вартості:

мінімізувати функцію F за обмежень

$$\sum_{j:(i,j)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i,\ i \in N, \tag{15}$$

$$r_{ij}^- \le x_{ij} \le r_{ij}^+,\ (i,j) \in V. \tag{16}$$

Умова розв’язності (2) для цієї задачі записується у вигляді

$$\sum_{i\in \bar{N}} d_i + \sum_{i\in N\setminus \bar{N}} d_i = 0\,. \tag{17}$$

Невідомими є величини x_{ij}, $(i,j)\in V$, d_i, $i \in \bar{N}$.

Вибираючи вираз для цільової функції у вигляді (13), побудуємо для задачі (13), (15), (16), (17) функцію Лагранжа [8]

$$L(x,u) = \sum_{(i,j\in V)} \left(\frac{1}{1+\alpha} l_{ij} |x_{ij}|^{1+\alpha} - x_{ij}(u_j - u_i) \right) +$$

$$+ \sum_{i\in \bar{N}} (u_0 - u_i) d_i + \sum_{i\in N\setminus \bar{N}} (u_0 - u_i) d_i. \tag{18}$$

Тут $x = \{x_{ij}, (i,j)\in V\}$; u_0 – двоїста змінна, що відповідає рівності (17); $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор двоїстих змінних, які відповідають обмеженням (16).

Якщо точка $\{x^*, u^*\}$, де $r_{ij}^- \le x_{ij}^* \le r_{ij}^+$, $(i,j)\in V$, є сідловою точкою функції Лагранжа (18), то x^* є розв’язком вихідної задачі. З теорії двоїстості [8] розв’язування задачі (13), (15), (16), (17) є еквівалентним максимізації вгнутої неперервно диференційованої функції

$$\Phi(u) = \min_{x_{ij}\in[r_{ij}^-, r_{ij}^+]} L(x,u)\,.$$

З необхідних умов екстремуму отримуємо, що мінімум функції $L(x,u)$ із врахуванням простих обмежень (16) досягається в точці

$$x_{ij}^* =$$

$$= \begin{cases} r_{ij}^- & \text{при } \tilde{U}_{ij} \le r_{ij}^- l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \dfrac{|u_j - u_i|^{\frac{1}{\alpha}}}{l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}} \operatorname{sign}(u_j - u_i) & \text{при } \begin{array}{l} \tilde{U}_{ij} \ge r_{ij}^- l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \tilde{U}_{ij} \le r_{ij}^+ l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \end{array} \\ r_{ij}^+ & \text{при } \tilde{U}_{ij} \ge r_{ij}^+ l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \end{cases} \tag{19}$$

де $\tilde{U}_{ij} = |u_j - u_i|^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{sign}(u_j - u_i)$.

Крім того, виконуються співвідношення

$$u_i = u_0\,,\ i \in \bar{N}\,, \tag{20}$$

$$u_j = u_i + l_{ij} |x_{ij}|^{\alpha} \operatorname{sign} x_{ij}\,,\ (i,j)\in V. \tag{21}$$

Співвідношення (20) означають, що при розв’язанні задачі

$$\max \Phi \tag{22}$$

значення змінних u_i і $i \in N$ повинні збігатися для тих вершин $i \in \bar{N} \subseteq N$, де розташовані недетерміновані джерела. Цей факт враховується при побудові розв’язку задачі (22). Формули (19) дають можливість після розв’язання двоїстої задачі повернутися до вихідних змінних і отримати розподіл потоків у мережі.

Використовуючи (19), конкретизуємо вигляд функції Φ:

$$\Phi(u) = \sum_{(i,j)\in V} \phi_{ij}(u_j - u_i) + \sum_{i\in \bar{N}\setminus N} (u_0 - u_i) d_i\,, \tag{23}$$

де

$$\phi_{ij} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha} l_{ij} |r_{ij}^-|^{1+\alpha} & \text{при } \tilde{U}_{ij} \le r_{ij}^- l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ -\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \dfrac{|u_j - u_i|^{\frac{1}{\alpha}}}{l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}} \operatorname{sign}(u_j - u_i) & \text{при } \begin{array}{l} \tilde{U}_{ij} \ge r_{ij}^- l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \tilde{U}_{ij} \le r_{ij}^+ l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}, \end{array} \\ \dfrac{1}{1+\alpha} l_{ij} |r_{ij}^+|^{1+\alpha} & \text{при } \tilde{U}_{ij} \ge r_{ij}^+ l_{ij}^{\frac{1}{\alpha}}. \end{cases}$$

Алгоритм 4. Розв'язання двоїстої задачі

1. Присвоюємо невідомим величинам d_i, $i \in N$, довільні початкові значення, що задовольняють умові (17). Застосовуючи алгоритми 2 і 3, знаходимо розподіл потоків x без врахування обмежень на пропускні здатності дуг.

2. Вибираємо довільне початкове значення u_0 і знаходимо решту величин u_i, $i = 1, 2, ..., n$, за формулами (21), використовуючи значення потоків, знайдені на кроці 1. Ці значення потоків обираємо за початкове наближення до розв'язання задачі (22).

3. Максимізуємо функцію (23), використовуючи метод покоординатного спуску. При цьому варіюються тільки змінні u_i, $i \in N \backslash \bar{N}$. Покладаємо $u_i = u_0$, $i \in \bar{N}$. На цьому кроці розв'язується стільки одновимірних задач, скільки є джерел з детермінованими джерелами $i \in$ $\in N \backslash \bar{N}$. Алгоритм розв'язання одновимірних задач наведено нижче.

4. Знаючи оптимальні значення u_i^*, $i \in N$, та використовуючи формули (19), повертаємось до вихідних змінних $x^* = \{x_{ij}^*, (i,j) \in V\}$, що дає оптимальний розподіл потоків у мережі.

Алгоритм 5. Одновимірний пошук

Функція (23) по кожній змінній є строго вгнутою і гладкою. Нехай зроблено k кроків процесу і на $(k+1)$-му кроці проварійовані перші $i-1$ компонент вектора u, тобто отримано точку $\{u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, ..., u_{i-1}^k, u_i^k, ..., u_n^k\}$.

1. Визначаємо деякий інтервал $[\gamma^-(u_i^k),$ $\gamma^+(u_i^k)]$, для якого

$$\Phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, ..., u_{i-1}^k, u_i^k - \gamma^-(u_i^k), ..., u_n^k) \le$$
$$\le \Phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, ..., u_{i-1}^k, u_i^k, ..., u_n^k) \le$$
$$\le \Phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, ..., u_{i-1}^k, u_i^k + \gamma^+(u_i^k), ..., u_n^k).$$

Оскільки обчислення проводяться методом покоординатного спуску, то всі координати, крім u_i^k, є фіксованими.

2. Здійснюємо на знайденому інтервалі $[\gamma^-(u_i^k), \gamma^+(u_i^k)]$ максимізацію $\Phi(u)$ по u_i за допомогою комбінації методів золотого перетину і параболічної інтерполяції [9].

3. Процес продовжуємо, доки довжина інтервалу не стане менше заданої межі.

Висновки

Ефективність запропонованого підходу забезпечується за рахунок зменшення обсягів обчислень, коли замість невідомих потоків варіюються параметричні змінні, кількість яких дорівнює кількості замкнених циклів мережі. Для прикладу, мережа магістральних газопроводів України становить понад 200 ділянок, в той час як українська газотранспортна система має лише шість замкнених циклів.

Додаткове підвищення ефективності потокорозподілення в запропонованих методах досягається завдяки оптимальному перерозподілу навантаження джерел.

Зазначимо, що загальний характер досліджуваних закономірностей дає можливість застосовувати викладені методи для розрахунку довільних розподільних систем. Однак у випадку практичних обчислень ми вибираємо відповідні функції для побудови алгоритмів розв'язання конкретних прикладних задач.

Предметом подальших досліджень може бути побудова алгоритмів для нелінійних задач розподілу потоків у ще більш загальній постановці, що дасть можливість запропонувати єдині методи розрахунків для широкого кола розподільних мереж.

Е.Е. Кирик

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ В СЕТЯХ СЛОЖНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ТОПОЛОГИИ

Нелинейная задача распределения потоков, размерность которой равна количеству участков сети, трансформируется в задачу без ограничений, размерность которой зависит от количества замкнутых циклов сети. Для решения этой задачи небольшой размерности используются эффективные методы нелинейного программирования.

O. Ye. Kirik

FLOW DISTRIBUTION FOR COMPLEX RING TOPOLOGY NETWORKS

This study makes a case for the nonlinear flow distribution problem, whose dimension is equal to the quantity of arcs of a network that is transformed to a problem without restrictions, whose dimension depends on the quantity of the closed cycles of a network. To solve the problem of the small dimension, we employ the effective nonlinear programming methods.

1. *Dembo R.S., Mulvey J.M., Zenios S.A.* Large-Scale Nonlinear Network Models and Their Application // Operations Research. – 1989. – **37**. – P. 353–372.
2. *Bertsekas D.P.* Network Optimization: Continuous and Discrete Models. – Belmont: Athena Scientific, 1998. – 608 p.
3. *Пшеничный Б.Н., Кирик Е.Е.* Методы нелинейного программирования и потоки в сетях // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 6. – С. 67–77.
4. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 67–73.
5. *Кірік О.Є.* Алгоритми ітераційного квадратичного програмування для задач оптимального розподілу потоків // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2008. – № 1. – С. 101–113.
6. *Оре О.* Графы и их применение. – М.: Мир, 1965. – 174 с.
7. *Пшеничный Б.Н.* Расчет энергетических сетей на электронных вычислительных машинах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1962. – **2**, № 5. – С. 942–947.
8. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
9. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
22 жовтня 2008 року